

# ساختمان های گسسته

نویسنده:

سمیرا ابوطالبی

سرشناسه	: ابوطالبی، سمیرا، ۱۳۶۱ -
عنوان و نام پدیدآور	: ساختمان های گسسته/ نویسنده سمیرا ابوطالبی.
مشخصات نشر	: اصفهان: آسمان نگار، ۱۳۹۴.
مشخصات ظاهری	: ۴۵۰ ص.
شابک	: ۱۷۰۰۰۰ ریال: 978-600-6596-36-5
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
موضوع	: ریاضیات
رده بندی کنگره	: PIR: ۸۳۶۰ /س ۳م ۲ ۱۳۹۴
رده بندی دیویی	: ۵۰۰:
شماره کتابشناسی ملی	: ۳۶۱۱۳۶۶:

## انتشارات آسمان نگار

نام کتاب:	ساختمان های گسسته
نویسنده:	سمیرا ابوطالبی
قیمت:	۱۷۰۰۰ تومان
نوبت چاپ:	اول
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد
شماره استاندارد بین المللی کتاب:	۹۷۸-۶۰۰-۶۵۹۶-۳۶-۵
مدیر تولید:	مهدی عبدالمهدی
شماره تماس:	پایگاه اینترنتی:
۰۹۱۳۱۱۷۲۶۴۲ (سمسارزاده)	<a href="http://www.asemannegar.com">www.asemannegar.com</a>

«کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر محفوظ و مخصوص پدیدآورنده است»

## پیشگفتار

هدف در ساختمان های گسسته یادگیری مطالبی مجزا در ریاضیات و چگونگی به کارگیری آنهاست. در واقع این مطالب به دانشجویان می آموزد که چگونه ریاضی وار فکر کنند. مطالب مطرح شده در ساختمان های گسسته هر کدام مطلبی مفصل در علم ریاضیات دارد ولی در این کتاب مطالب با بیانی بسیار روان، ساده و قابل فهم و در عین حال به طور کامل و بر طبق سرفصل این درس بیان شده است.

کتاب به گونه ای نگارش گردیده است که هم برای دانشجویان فنی مهندسی در درس های ساختمان های گسسته و ریاضی گسسته و هم برای دانشجویان ریاضی در درس ریاضیات گسسته قابل استفاده است. مطالب مطرح شده، از انسجام کافی برخوردار هستند و تمام مطالب مورد نیاز در هر بخش، در بخش های قبلی آورده شده اند.

این کتاب مشتمل بر 8 فصل است. در فصل 1، مبحث گزاره ها و روش های اثبات ریاضی بیان شده است. فصل های 2 و 3 به مباحث رابطه ها و شبکه ها، دریچه ها و جبر بول می پردازند. در فصل 4 اصول شمارش و در فصل 5 روابط بازگشتی و توابع مولد بررسی می شوند. در فصل 6 به بیان ساختمان های جبری، دستور زبان و ماشین های حالت متناهی می پردازیم و در نهایت در فصل های 7 و 8 نظریه گراف و درخت مطرح شده اند.

در پایان هر فصل مسائلی با حل کاملا تشریحی آورده شده و سپس تمرین هایی بدون حل برای خودآزمایی دانشجویان قرار داده شده است.

برخود لازم می دانم که از جناب آقای نصر که طراحی جلد کتاب و سرکار خانم قهرمانی که صفحه آرایی را به عهده داشتند و از جناب آقای سمسار زاده مدیر انتشارات آسمان نگار کمال تشکر و تقدیر را داشته باشم.

مسلمان این کتاب خالی از اشتباه و نقص نیست و مایه امتنان خواهد بود اگر خوانندگان این نوع اشتباهات و همچنین پیشنهادات و انتقاداتی که مسلما می تواند باعث تکمیل تر شدن محتوای کتاب شود را از طریق پست الکترونیک [sa.aboutaleby@gmail.com](mailto:sa.aboutaleby@gmail.com) به اطلاع اینجانب برسانند تا انشاء الله برای چاپ بعدی بتوانیم آنها را در نظر داشته باشیم.



## فهرست مطالب

9	1 منطق
9	1-1 گزاره
10	1-1-1 رابط های منطقی
15	2-1-1 جبر گزاره ها
21	2-2 گزاره نما و سور
21	1-2-1 گزاره نما
23	2-2-1 سور
35	3-1 استنباط
37	1-3-1 قوانین استنباط برای منطق گزاره ها
39	2-3-1 ساخت یک استدلال با استفاده از قانون های استنباط
40	4-1 قضیه و اثبات
41	4-1-1 روش های اثبات قضایا
42	1- روش اثبات مستقیم
42	2- روش اثبات غیرمستقیم (روش عکس نقیض)
43	3- روش برهان خلف
46	4- اصل استقرا ریاضی
49	مثال نقض
49	اشتباهات در اثبات ها
51	مسائل حل شده
72	تمرین
79	2 رابطه
79	1-2 رابطه
82	2-1-1 انواع رابطه ها
82	1- رابطه بازتابی (انعکاسی)
83	2- رابطه تقارنی (متقارن)
83	3- رابطه پادتقارنی (پادمتقارن)
84	4- رابطه تراگذری (متعدی، تعدی)
84	2-1-2 اعمال روی رابطه ها
86	3-1-2 نمایش رابطه ها با استفاده از ماتریس
89	4-1-2 نمایش رابطه ها با استفاده از گراف جهت دار

## 6/ ساختمان های گسسته

91	2-2 بستار
92	1- بستار بازتابی
92	2- بستار متقارن
93	3- بستار تراگذری
101	2-3 رابطه هم ارزی
102	کلاس هم ارزی
105	2-4 رابطه ترتیب جزئی
107	نمودار هاسه
111	عنصر ماکزیمال و مینیمال
112	2-5 تابع
113	انواع تابع
117	مسائل حل شده
130	تمرین
<b>135</b>	<b>3 شبکه</b>
135	3-1 شبکه
142	3-2 دریچه (گیت)
146	3-2-1 مدارهای ترکیبی
148	3-2-2 عبارت بولی
149	3-2-3 مدارهای ترکیبی معادل
150	3-3 جبر بولی
156	3-3-1 تابع بولی
158	3-3-2 صورت های نرمال
164	3-4 مینیمم سازی مدارها با استفاده از جدول کارنو
176	مسائل حل شده
198	تمرین
<b>207</b>	<b>4 شمارش</b>
207	4-1 اصول اساسی شمارش
209	4-2 اصل لانه کبوتری
210	4-3 جایگشت و ترکیب
213	جایگشت با تکرار مجاز
213	ترکیب با تکرار مجاز

## فهرست مطالب/7

214	جایگشت های مجموعه ها با اشیاء مشابه
215	توزیع اشیاء در جعبه ها
216	مسائل حل شده
228	تمرین
<b>231</b>	<b>5 روابط بازگشتی</b>
231	1-5 تعاریف بازگشتی
231	1-1-5 تعریف بازگشتی توابع
232	2-1-5 تعریف بازگشتی مجموعه ها
233	2-5 روابط بازگشتی
240	3-5 رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت و حل آنها
241	1-3-5 حل رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت از درجه دو
246	2-3-5 حل رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت از درجه $k$
250	3-3-5 روابط بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت
255	4-5 الگوریتم تقسیم و پیشروی
260	5-5 تابع مولد
264	1-5-5 مسائل شمارش و توابع مولد
266	2-5-5 روابط بازگشتی و تابع مولد
268	3-5-5 اثبات اتحادها و تابع مولد
269	مسائل حل شده
296	تمرین
<b>301</b>	<b>6 ساختمان جبری</b>
301	1-6 ساختمان های جبری
313	2-6 گرامر و دستور زبان
316	1-2-6 انواع دستور زبان
318	3-6 ماشین حالت متناهی
318	1-3-6 ماشین های حالت متناهی با خروجی
321	2-3-6 ماشین های حالت متناهی بدون خروجی
326	مسائل حل شده
337	تمرین
<b>341</b>	<b>7 گراف</b>
341	1-7 تعاریف

## 8/ ساختمان های گسسته

- 345 ..... 2-7 گراف های ساده خاص
- 349 ..... 3-7 ماتریس مجاورت
- 352 ..... 4-7 ماتریس وقوع
- 353 ..... 5-7 همریختی گرافها
- 356 ..... 6-7 همبندی
- 360 ..... 7-7 مسیرها و همریختی
- 362 ..... 8-7 مسیر و دور اویلری
- 363 ..... 9-7 مسیر و دور همیلتنی
- 365 ..... 10-7 گراف مسطح
- 369 ..... 11-7 رنگ آمیزی گراف
- 371 ..... 12-7 گراف وزن دار
- 375 ..... مسائل حل شده
- 392 ..... تمرین
- 397 ..... 8 درخت**
- 397 ..... 1-8 درخت
- 403 ..... 2-8 درخت فراگیر
- 404 ..... الگوریتم پریم
- 405 ..... الگوریتم کراسکل
- 406 ..... 3-8 درخت ریشه دار
- 411 ..... 1-3-8 درخت دودویی
- 415 ..... 2-3-8 پیمایش درخت های ریشه دار
- 418 ..... 4-8 مرتب سازی درخت ها
- 418 ..... مرتب سازی حبابی
- 419 ..... مرتب سازی ادغامی
- 420 ..... 5-8 درخت فراگیر با کمترین قطر
- 420 ..... 1- روش جستجوی عمقی
- 422 ..... 2- روش جستجوی ردیفی (عرضی)
- 423 ..... مسائل حل شده
- 438 ..... تمرین
- 441 ..... منابع و مآخذ
- 442 ..... لغت نامه فارسی به انگلیسی

## منطق

### مقدمه

منطق مجموعه قواعدی است که به کمک آنها می توان اعتبار یک استدلال را تعیین نمود. برای اثبات قضایا میتوان از روش های منطق استفاده کرد. در این فصل ابتدا تعریفی از گزاره ها و سپس قوانین و مثال های استفاده از آنها را بیان می کنیم. سپس به سراغ معرفی سورها و بیان جمله ها با آنها می رویم و در پایان روش های اثبات ریاضی را برای مسائل گوناگون معرفی می کنیم.

### 1-1 گزاره

**تعریف:** گزاره جمله ای خبری است که یا درست است و یا نادرست ولی نه هر دو. گزاره ها را با متغیرهایی نظیر  $p, q, r, s, \dots$  نشان می دهیم.

**تعریف:** درستی یا نادرستی هر گزاره را ارزش آن گزاره گویند. درستی را با  $T$  و نادرستی را با  $F$  نشان می دهیم و آن را در یک جدول به نام جدول ارزشی نمایش می دهیم.

**مثال 1:** تمام جمله های زیر گزاره هستند.

الف) تهران پایتخت ایران است. ب) اصفهان پایتخت ایران است. ج)  $1+1=2$

د)  $2+2=3$  ه) نیما یوشیج شاعر معاصر ایران است.

گزاره های الف، ج و ه درست هستند. در حالی که گزاره های ب و د نادرست هستند.

**مثال 2:** هیچکدام از جمله های زیر گزاره نیستند.

الف) این چیست؟ ب) این مطلب را با دقت بخوان. ج)  $1+x=2$  د) ساختمان گسسته درس مشکلی است.

جمله های الف و ب گزاره نیستند. چون جمله خبری نیستند و جمله های ج و د هم گزاره نیستند چون ارزش آنها مشخص نیست.



## 1 منطق/11

**حل:** ترکیب عطفی دو گزاره  $p$  و  $q$  داده شده به صورت " امروز جمعه است و امروز باران می بارد" است و یا به صورت ساده تر " امروز جمعه است و باران می بارد".

**3- ترکیب فصلی (یا ، OR):** ترکیب فصلی دو گزاره را با نماد  $\vee$  نمایش می دهیم و ارزش آن به صورت زیر است:

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه  $p \vee q$  وقتی نادرست است که  $p$  و  $q$  هر دو نادرست باشند و در غیراینصورت درست است. جدول ارزشی ترکیب فصلی در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

**مثال 2:** ترکیب فصلی دو گزاره داده شده در مثال قبل را بیابید.

**حل:** ترکیب فصلی دو گزاره  $p$  و  $q$  داده شده به صورت " امروز جمعه است یا امروز باران می بارد" است و یا به صورت ساده تر " امروز جمعه است یا باران می بارد".

**4- ترکیب فصلی با یای مانع جمع (بای انحصاری ، XOR):** ترکیب فصلی با یای مانع

جمع دو گزاره را با نماد  $\underline{\vee}$  یا  $\oplus$  نمایش می دهیم و ارزش آن به صورت زیر است:  
اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه  $p \underline{\vee} q$  وقتی درست است که از دو گزاره  $p$  و  $q$  تنها یک گزاره درست باشد و در غیراینصورت نادرست است، در واقع درست یا نادرست بودن هر دو گزاره در یک زمان امکان پذیر نیست. جدول ارزشی ترکیب فصلی با یای مانع جمع در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$p \underline{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

**مثال 3:** در مثال 1 ترکیب فصلی با یای مانع جمع دو گزاره  $p$  و  $q$  داده شده به صورت "

امروز جمعه است یا امروز باران می بارد ولی نه هر دو" است. در واقع این گزاره زمانی نادرست است که امروز جمعه نباشد و باران هم نیارد و یا امروز هم جمعه باشد و هم باران بیارد. در حالیکه ترکیب فصلی این دو گزاره تنها زمانی نادرست است که امروز جمعه نباشد و بارن هم نیارد.

## 12/ ساختمان های گسسته

**5- ترکیب شرطی (اگر، آنگاه):** ترکیب شرطی دو گزاره را با نماد  $p \rightarrow q$  نمایش می دهیم و می خوانیم "اگر  $p$ ، آنگاه  $q$ " یا "  $p$  شرط کافی است برای  $q$ " یا "  $q$  شرط لازم است برای  $p$ " یا "  $p$  تنها اگر  $q$ " یا "  $q$  اگر  $p$ " و ارزش آن به صورت زیر است: اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه  $p \rightarrow q$  وقتی نادرست است که  $p$  درست و  $q$  نادرست باشند و در غیراینصورت درست است. جدول ارزشی ترکیب شرطی در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

**مثال 4:** فرض کنید گزاره  $p$  به صورت " زهرا درس ساختمان های گسسته می خواند" و گزاره  $q$  به صورت " زهرا شغل خوبی خواهد یافت" باشند. ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  را بیان کنید.

**حل:** از تعریف ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  داریم: "اگر زهرا درس ساختمان های گسسته را بخواند، آنگاه شغل خوبی خواهد یافت". این جمله را به صورت های زیر نیز می توان بیان کرد: " زهرا شغل خوبی خواهد یافت اگر درس ساختمان های گسسته را بخواند" و یا "زهرا درس ساختمان های گسسته را بخواند شرط کافی است برای آنکه شغل خوبی بیابد". از ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  می توان ترکیب های شرطی جدیدی به دست آورد. در اینجا سه ترکیب شرطی جدیدی را معرفی می کنیم:

**5-1 معکوس:** اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه معکوس ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  به صورت  $q \rightarrow p$  نمایش داده می شود.

**5-2 قرینه:** اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه قرینه ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  به صورت  $q \rightarrow \sim p$  نمایش داده می شود.

**5-3 عکس نقیض:** اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه عکس نقیض ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  به صورت  $\sim p \rightarrow \sim q$  نمایش داده می شود. نکته قابل توجه این است که همواره جدول ارزشی ترکیب شرطی  $p \rightarrow q$  و عکس نقیض آن یعنی  $\sim p \rightarrow \sim q$  یکی است.

**مثال 6:** گزاره " همه مثلث های همسر مشابه هستند" را در نظر بگیرید. این گزاره را به صورت ترکیب شرطی " اگر مثلث ها همسر باشند، آنگاه مشابه هستند" میتوان نوشت. فرض

## 1 منطق/13

کنید "مثلث ها همرس هستند"  $p =$  و "مثلث ها مشابه هستند"  $q =$ . بنابراین ترکیب شرطی به صورت  $p \rightarrow q$  است. معکوس، قرینه و عکس نقیض این ترکیب شرطی را بیابید.

**حل:** معکوس ترکیب شرطی داده شده  $q \rightarrow p$  است، یعنی "اگر مثلث ها مشابه باشند، آنگاه همرس هستند" یا ساده تر "همه مثلث های مشابه همرس هستند".  
قرینه ترکیب شرطی داده شده  $\sim q \rightarrow \sim p$  است، یعنی "اگر مثلث ها همرس نباشند، آنگاه مشابه نیستند".

و بالاخره عکس نقیض آن به صورت  $\sim q \rightarrow \sim p$  است، یعنی "اگر مثلث ها مشابه نباشند، آنگاه همرس نیستند".

**6- ترکیب دو شرطی (اگر و تنها اگر):** ترکیب دو شرطی دو گزاره را با نماد  $p \leftrightarrow q$  نمایش می دهیم و می خوانیم "اگر  $p$ ، آنگاه  $q$  و اگر  $q$ ، آنگاه  $p$ " یا " $p$  شرط لازم و کافی است برای  $q$ " یا " $p$  اگر و تنها اگر  $q$ ". در واقع ترکیب دو شرطی ترکیب عطفی دو ترکیب شرطی به صورت زیر است:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

ارزش ترکیب دو شرطی به صورت زیر است:

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه  $p \leftrightarrow q$  وقتی درست است که  $p$  و  $q$  ارزش یکسانی داشته باشند و در غیراینصورت نادرست است. جدول ارزشی ترکیب دو شرطی در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

**نکته:** اولویت بندی رابط های منطقی بیان شده به صورت زیر است:

ابتدا اولویت با پرانتز، سپس نقیض ( $\sim$ )، آنگاه عطف ( $\wedge$ ) و فصل ( $\vee$ ) و بالاخره شرطی ( $\rightarrow$ ) و دو شرطی ( $\leftrightarrow$ ) است.

**7- ترکیب نقیض و (NAND):** کلمه NAND از دو ترکیب AND و NOT به دست آمده است. ترکیب نقیض و دو گزاره را با نماد  $p \uparrow q$  نمایش می دهیم و به صورت  $p \uparrow q = \sim (p \wedge q)$  تعریف می شود و ارزش آن به صورت زیر است:

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه  $p \uparrow q$  وقتی درست است که  $p$  یا  $q$  نادرست باشد و در غیراینصورت نادرست است. جدول ارزشی ترکیب نقیض و در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$p \uparrow q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

**8- ترکیب نفیض یا (نفی جمع منطقی ، NOR) :** کلمه **NOR** از دو ترکیب OR

و NOT به دست آمده است. ترکیب نفیض یا دو گزاره را با نماد  $p \downarrow q$  نمایش می دهیم و به صورت  $(p \downarrow q) = \sim (p \vee q)$  تعریف می شود و ارزش آن به صورت زیر است:

اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، آنگاه  $p \downarrow q$  وقتی درست است که  $p$  و  $q$  هر دو نادرست باشد و در غیراینصورت نادرست است. جدول ارزشی ترکیب نفیض یا در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$p \downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

**تعریف:** دو گزاره  $p$  و  $p^*$  را که تنها شامل رابط های منطقی  $\wedge$ ،  $\vee$  و  $\underline{\vee}$  باشند را دوگان یکدیگر گوئیم اگر یکی از دیگری با جایگذاری  $\vee$  به جای  $\wedge$ ،  $\wedge$  به جای  $\vee$ ، T به جای F و F به جای T به دست آید.

**مثال 6:** دو گزاره  $(p \wedge q) \vee F$ ،  $(p \vee q) \wedge T$  دوگان یکدیگرند.

**نمایش گزاره های مرکب فارسی با نماد ریاضی رابط های منطقی:**

در فرایند نمایش گزاره های مرکب فارسی با نماد ریاضی رابط های منطقی ابتدا هر عبارتی را یک گزاره ساده مانند  $p$ ،  $q$ ،  $r$  و... در نظر گرفته، سپس با توجه به کل گزاره مرکب، رابط بین این گزاره های ساده را می یابیم. برای روشن شدن این فرایند دو مثال می زنیم:

**مثال 7:** گزاره مرکب فارسی زیر را با نماد ریاضی رابط های منطقی نمایش دهید.

"شما می توانید از سایت دانشگاه استفاده کنید تنها اگر دانشجوی رشته کامپیوتر باشید یا دانشجوی سال اول نباشید".

**حل:** ابتدا گزاره های ساده را مشخص می کنیم. "شما می توانید از سایت دانشگاه استفاده کنید"  $p =$ ، "شما دانشجوی رشته کامپیوتر هستید"  $q =$  و "شما دانشجوی سال اول هستید"  $r =$ . حال به سراغ رابط های موجود در گزاره مرکب می رویم. در اینجا کلمه "تنها اگر" ترکیب

## 1 منطق/15

شرطی را و کلمه "یا" ترکیب فصلی را و کلمه "نباشید" با توجه به انتخاب گزاره  $r \sim$  را نشان می دهند. بنابراین جمله فوق را به صورت  $p \rightarrow (q \vee \sim r)$  می توان نمایش داد.

**مثال 8:** گزاره مرکب فارسی زیر را با نماد ریاضی رابط های منطقی نمایش دهید.  
"شما نمی توانید از توپ جادویی شهربازی استفاده کنید اگر وزن شما بیشتر از 50 کیلوگرم باشد مگر این که سن شما از 16 سال کمتر باشد".

**حل:** ابتدا گزاره های ساده را مشخص می کنیم. " شما می توانید از توپ جادویی شهربازی استفاده کنید "  $q =$  ، " وزن شما بیشتر از 50 کیلوگرم است "  $r =$  و " سن شما از 16 سال کمتر است "  $s =$ . حال به سراغ رابط های موجود در گزاره مرکب می رویم. در اینجا کلمه " اگر " ترکیب شرطی و کلمه "مگر اینکه" ترکیب عطفی و کلمه " نمی توانید" نقیض را نشان می دهند. بنابراین جمله فوق را به صورت  $p \rightarrow \sim (r \wedge s)$  می توان نمایش داد. البته راه های دیگری نیز برای نمایش گزاره فوق وجود دارد، مثلا  $(\sim r \vee s) \vee \sim q$ .

### 1-1-2 جبر گزاره ها:

**1-راستگو (تاتولوژی):** گزاره مرکب  $P(p, q, r, \dots)$  را یک راستگو می نامند هرگاه  $P$  به ازای هر گزاره نظیر  $p, q, r, \dots$  درست باشد.

**مثال 1:**  $P(p, q) = p \vee \sim p$  یک راستگو است. جدول ارزشی این گزاره مرکب در زیر نشان داده شده است:

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

**مثال 2:**  $Q(p, q) = p \rightarrow (q \wedge p)$  یک راستگو است. جدول ارزشی این گزاره مرکب در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$q \wedge p$	$p \rightarrow (q \wedge p)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

## 16/ ساختمان های گسسته

**2- دروغگو (تناقض):** گزاره مرکب  $P(p, q, r, \dots)$  را یک دروغگو می نامند، هرگاه P به ازای هر گزاره نظیر  $p, q, r, \dots$  نادرست باشد. یا به عبارت دیگر  $\sim P$  راستگو باشد.

**مثال 3:**  $P(p, q) = p \wedge \sim p$  یک دروغگو است. جدول ارزشی این گزاره مرکب در زیر نشان داده شده است:

$p$	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

**3- احتمال:** گزاره مرکب  $P(p, q, r, \dots)$  را یک احتمال می نامند هرگاه P به ازای هر گزاره نظیر  $p, q, r, \dots$  نه راستگو و نه دروغگو باشد.

**مثال 4:**  $P(p, q) = p \vee \sim q$  یک احتمال است. جدول ارزشی این گزاره مرکب در زیر نشان داده شده است:

$p$	$q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

**4- استلزام منطقی:** اگر  $P(p, q, r, \dots)$  و  $Q(p, q, r, \dots)$  دو گزاره مرکب باشند به طوری که به ازای هر گزاره نظیر  $p, q, r, \dots$  گزاره شرطی  $P \rightarrow Q$  راستگو باشد، آنگاه گزاره  $P \rightarrow Q$  را یک استلزام منطقی گویند و با نماد  $P \Rightarrow Q$  نمایش می دهند.

**مثال 5:** اگر  $P(p, q) = p \rightarrow q$  و  $Q(p, q) = \sim p \vee q$ . آنگاه  $P \Rightarrow Q$ . این مطلب از جدول ارزشی زیر واضح است:

$P$	$q$	$P = p \rightarrow q$	$\sim p$	$Q = \sim p \vee q$	$P \rightarrow Q$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

## 1 منطق/17

از جمله دیگر استلزام های منطقی عبارتند از:

$$p \wedge q \Rightarrow q \text{ و } p \wedge q \Rightarrow p$$

$$q \Rightarrow p \vee q \text{ و } p \Rightarrow p \vee q$$

$$q \Rightarrow p \wedge \sim(p \vee q) \text{ و } p \Rightarrow q \wedge \sim(p \vee q)$$

**5- هم ارز منطقی:** دو گزاره مرکب  $P(p, q, r, \dots)$  و  $Q(p, q, r, \dots)$  را هم ارز منطقی می نامند، هرگاه به ازای هر گزاره نظیر  $p, q, r, \dots$  ارزش  $P$  و  $Q$  یکسان باشد. یا به عبارت دیگر گزاره  $P \leftrightarrow Q$  راستگو باشد. هم ارز منطقی بودن  $P$  و  $Q$  را با نماد  $Q \equiv P$  نمایش می دهند.

جدول زیر تعدادی از هم ارزهای منطقی مهم را نشان می دهد :

**جدول 1: هم ارزی منطقی**

$p \vee p \equiv p$ و $p \wedge p \equiv p$	قوانین خود توانی
$p \vee q \equiv q \vee p$ و $p \wedge q \equiv q \wedge p$	قوانین جابه جایی
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	قوانین شرکت پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	قوانین پخشی
$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$	قوانین دموورگان
$p \vee F \equiv p$ و $p \wedge T \equiv p$	قوانین همانی
$p \vee T \equiv T$ و $p \wedge F \equiv F$	قوانین غلبه
$p \vee \sim p \equiv T$ و $p \wedge \sim p \equiv F$	قوانین متمم
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ و $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	قوانین جذب
$\sim(\sim p) \equiv p$	قانون نقیض دوگانه

در جدول فوق،  $T$  نشان دهنده گزاره ای است که همواره درست و  $F$  نشان دهنده گزاره ای است که همواره نادرست است.

قوانین شرکت پذیری خوش تعریف هستند، به این معنا که مثلاً در  $p \vee q \vee r$  تفاوتی ندارد که ابتدا ترکیب فصلی  $p$  و  $q$  را محاسبه و سپس ترکیب فصلی  $p \vee q$  و  $r$  را به دست آورد یا این که ابتدا ترکیب فصلی  $q$  و  $r$  را محاسبه و سپس ترکیب فصلی  $q \vee r$  و  $p$  را به دست آورد. این قانون را می توان تعمیم داد: گزاره های  $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$

## 18/ ساختمان های گسسته

$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$  نیز خوش تعریف هستند. علاوه بر این می توان قوانین دمورگان را نیز به صورت زیر تعمیم داد:

$$\sim(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv (\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \dots \wedge \sim p_n)$$

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv (\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \dots \vee \sim p_n)$$

**نکته:** برای بررسی هم ارزی منطقی  $Q \equiv P$  دو راه وجود دارد:

راه اول استفاده از جدول ارزشی است. در این روش با رسم جدول ارزشی نشان می دهیم دو ستون گزاره های مرکب P و Q دارای ارزشی یکسان هستند. راه دوم استفاده از هم ارزی های جدول 1 است. این دو روش را با چند مثال نشان می دهیم:

**مثال 6:** نشان دهید گزاره های مرکب  $p \rightarrow q$  و  $\sim p \vee q$  هم ارز منطقی هستند. یعنی  $(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$ .

**حل:** جدول ارزشی زیر این مطلب را نشان می دهد:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

**مثال 7:** نشان دهید گزاره های  $p \wedge \sim q$  و  $\sim(p \rightarrow q)$  هم ارز منطقی هستند. یعنی:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$$

$$(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$$

**حل:** از مثال قبل استفاده می کنیم. داریم:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$$

از دو طرف این هم ارزی نقیض گرفته :

سمت راست هم ارزی اخیر را از قانون دمرگان ساده کرده:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv (\sim(\sim p)) \wedge (\sim q)$$

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

حال از قانون نقیض دو گانه استفاده می کنیم:

هم ارزی خواسته شده از طریق هم ارزی ها ثابت شد.

**مثال 8:** نشان دهید گزاره های  $\sim(p \vee (\sim p \wedge q))$  و  $\sim(p \wedge \sim q)$  هم ارز منطقی هستند.

**حل:** ابتدا با استفاده از جدول ارزشی:

# 1 منطق / 19

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee (\sim p \wedge q))$	$\sim (p \vee (\sim p \wedge q))$	$\sim q$	$(\sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

حال با استفاده از هم ارزی ها:

$$\sim (p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim (\sim p \wedge q) \quad \text{قانون دمورگان:}$$

$$\equiv \sim p \wedge (\sim (\sim p) \vee \sim q) \quad \text{قانون دمورگان:}$$

$$\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \quad \text{قانون نقیض دوگانه:}$$

$$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{قانون پخشی:}$$

$$\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{قانون متمم:}$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee F \quad \text{قانون جابه جایی:}$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{قانون همانی:}$$

**نکته:** در دو جدول زیر هم ارزی هایی برای گزاره های مرکب شامل ترکیب شرطی و ترکیب دو شرطی آورده شده است. تمامی این هم ارزی ها را با استفاده از هم ارزی های جدول 1 می توان ثابت کرد.

جدول 2
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
$\sim (p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \sim q$

## جدول 3

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
$p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$
$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

## منطق و نمایش بیتی (دودویی):

در مثال های فوق با جدول ارزشی، ارزش یک گزاره را نشان دادیم. اگر تعداد گزاره ها افزایش یابد، مثلا 20 گزاره ساده در یک گزاره مرکب وجود داشته باشد نیاز به  $2^{20} = 1048576$  سطر است که واضح است برای چنین جدولی از روش دستی نمی توان استفاده کرد و نیاز به محاسبات با کامپیوتر است. بنابراین باید بتوان گزاره ها، رابط های منطقی و ارزش ها را برای کامپیوتر تعریف کرد.

کامپیوتر ها اطلاعات را با استفاده از بیت ها ذخیره و نمایش می دهند. یک بیت نمادی با دو ارزش صفر و یک است. از طرفی در اینجا از دو ارزش درست T و نادرست F استفاده کردیم. بنابراین می توان عملگرهای بیتی کامپیوتر را با رابط های منطقی متناظر کرد به این صورت که یک را نمایش T و صفر را نمایش F در نظر گرفت. در زیر نمونه ای از این روند را نشان داده ایم:

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \underline{\vee} q$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

رشته بیتی یک دنباله از صفر و یک هاست. رابط های منطقی را همانند آنچه در بالا گفته شد بیت به بیت روی رشته های بیتی نیز می توان انجام داد.